

Control #3

I

1) Considere el siguiente problema de P.L.

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad \text{Min } Z = & \quad 4 X_1 + 2 X_2 + X_3 \\
 & 4 X_1 + 3 X_2 - X_3 \geq 6 \\
 & X_1 + X_2 + X_3 \leq 3 \\
 & 3 X_1 + X_2 = 3 \\
 & X_1 \geq 0, X_2 \text{ irrestricta}, X_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

a) Obtenga el dual de (P).

b) Usando el Teorema de la Holgura Complementaria, muestre que la solución

$$X_1 = \frac{3}{5}, X_2 = \frac{6}{5}, X_3 = 0, \text{ es óptima para (P).}$$

2) Una empresa produce 3 productos ($j=1,2,3$) para lo cual dispone de 2 tipos de recursos ($i=1,2$). El problema de planificación de la producción para 1 semana se planteó como un problema de programación lineal:

$$\begin{aligned}
 \text{(P)} \quad \text{Max } Z = & \quad 4 X_1 + 6 X_2 + 8 X_3 \\
 & 2 X_1 + X_2 + 2 X_3 + X_4 = 50 \\
 & X_1 + X_2 + X_3 + X_5 = 60 \\
 & X_i \geq 0
 \end{aligned}$$

Donde para $j=1, 2, 3$, X_j representa la cantidad a producir del producto j y X_4 y X_5 representan las cantidades no utilizadas de los recursos 1 y 2, respectivamente.

Se obtuvo la base óptima $B^* = [\beta_2, \beta_5] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

a) Determine la solución óptima de (P) y de su dual (D) usando sus expresiones matriciales.

b) Suponga que la empresa puede comprar cada unidad de los recursos 1 y 2 al precio de 5 y 1 unidades monetarias respectivamente. Diga si le conviene a la empresa adquirir más unidades de algunos de los recursos. Justifique.

II

Sea el siguiente problema lineal:

$$\text{Max } Z = 8 X_1 + 14 X_2 + 30 X_3 + 50 X_4$$

$$\begin{aligned} \text{Sea: } & X_1 + 2 X_2 + 10 X_3 + 16 X_4 \leq 800 \\ & 1,5 X_1 + 2 X_2 + 4 X_3 + 5 X_4 \leq 1000 \\ & 0,5 X_1 + 0,6 X_2 + X_3 + 2 X_4 \leq 340 \\ & X_j \geq 0 \end{aligned}$$

Para resolver el problema se agregan como variables de holgura X_5 , X_6 y X_7 a la primera, segunda y tercera restricción respectivamente.

Se sabe que la matriz básica óptima es $B^* = [a_2, a_1, a_7]$ y su inversa resulta ser:

$$B^{*-1} = \begin{bmatrix} 1,5 & -1 & 0 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix}$$

Con estos antecedentes responda.

a) Suponga que $C_1 = 8$ se cambia por $C_1 = 9$. Analice si cambia o no en la solución óptima lo siguiente:

- El grupo de variables básicas o base óptima
- El valor de las variables básicas
- El valor de la función objetivo

b) Al cambiar $C_1 = 8$ por $C_1 = 9$ analice si cambian o no los precios sombra del problema. En caso afirmativo determine para cada precio sombra el valor antiguo y el nuevo.

c) Suponga que $b_2 = 1000$ se cambia por $b_2 = 900$. Analice si cambia o no en la solución óptima lo siguiente:

- El conjunto de variables básicas o base óptima
- El valor de las variables básicas
- El valor de la función objetivo

En caso afirmativo determine los nuevos valores.

d) Si $b_2 = 1000$ se cambia por $b_2 = 900$ analice si cambian o no los precios sombra del problema. En caso afirmativo determine para cada precio sombra el valor nuevo.

III

- a) Al aplicar el algoritmo simplex en forma matricial detalle que elementos de las formas canónicas se calculan y cuales no en cada iteración.
- b) Sean X^* e Y^* soluciones óptimas del problema primal y dual respectivamente. Demuestre que:

$$\begin{aligned}(A X^* - b)^T Y^* &= 0 \\ X^{*T} (c - A^T Y^*) &= 0\end{aligned}$$

- c) Sea X_j una variable no básica en la solución óptima. Suponga que C_j se cambia por C'_j y se sabe que sigue cumpliendo el criterio de optimalidad en la última forma canónica.

Analice si cambia o no:

- El valor de las variables básicas
 - El valor de la función objetivo
 - El valor de las variables duales
- d) Justifique o rechace la siguiente afirmación: "Al cambiar b_i el menor cambio que se puede esperar son nuevos valores de las variables básicas y un nuevo valor para la función objetivo".

IV

1) Considere el siguiente problema de Programación Entera:

$$\begin{aligned} \text{(P)} \quad \text{Max } Z = & \quad 5 X_1 + 7 X_2 \\ & 4 X_1 + 3 X_2 \leq 12 \\ & X_1 + 4 X_2 \leq 8 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \text{ y enteras} \end{aligned}$$

Obtenga la solución óptima usando algoritmo de ramificación y acotamiento. Elija la variable X_2 para la primera ramificación (resuelva geoméricamente los problemas lineales)

2) En el proceso de resolver un problema de programación lineal entera de maximización (PE) con el algoritmo de ramificación y acotamiento, se ramificó un problema en dos subproblemas P^- y P^+ . Sea \bar{Z} la mejor cota inferior obtenida hasta el momento (incumbente) y Z^- , Z^+ los valores óptimos de los problemas lineales P^- y P^+ . Para cada una de las siguientes situaciones diga, justificando, cuales de los subproblemas, no es necesario ramificar.

- a) $Z^- > \bar{Z} > Z^+$
- b) $Z^- > Z^+ > \bar{Z}$ y la solución óptima de P^- es factible para (PE)
- c) P^+ es infactible, la solución óptima de P^- es factible para (PE) y $Z^- \leq \bar{Z}$.

I

$$\begin{aligned}
 4) \quad a) \quad (D) \quad \max W &= 6Y_1 + 3Y_2 + 3Y_3 \\
 4Y_1 + Y_2 + 3Y_3 &\leq 4 \\
 3Y_1 + Y_2 + Y_3 &= 2 \\
 -Y_1 + Y_2 &\leq 1 \\
 Y_1 \geq 0 \quad Y_2 \leq 0 \quad Y_3 \text{ imstricta}
 \end{aligned}$$

b) Holgura complementaria

$$\begin{aligned}
 [1] \quad x_1 (4 - 4Y_1 - Y_2 - 3Y_3) &= 0 & [4] \quad Y_1 (4x_1 + 3x_2 - x_3 - 6) &= 0 \\
 [2] \quad x_2 (2 - 3Y_1 - Y_2 - Y_3) &= 0 & [5] \quad Y_2 (x_1 + x_2 + x_3 - 3) &= 0 \\
 [3] \quad x_3 (1 + Y_1 - Y_2) &= 0 & [6] \quad Y_3 (3x_1 + x_2 - 3) &= 0
 \end{aligned}$$

* con $x_1^* = \frac{3}{5}$, $x_2^* = \frac{6}{5}$, $x_3^* = 0$, [3], [4], [6] son satisfichas.
 Para que [1], [2], [5] sean satisfichas se tiene:

$$\begin{cases} 4Y_1 + Y_2 + 3Y_3 = 4 \\ 3Y_1 + Y_2 + Y_3 = 2 \\ Y_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Y_1 = \frac{2}{5} \\ Y_2 = 0 \\ Y_3 = \frac{4}{5} \end{cases}$$

* $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0)$ es factible para (P)

* $(Y_1^*, Y_2^*, Y_3^*) = (\frac{2}{5}, 0, \frac{4}{5})$ es factible para (D)

Por el teorema de la Holgura complementaria se tiene que $(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 0)$ es solución óptima de (P)

2)

a) $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

sol. optima de (P) : $x_B^* = \hat{B}^{-1}b$, $x_N^* = 0$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50 \\ 60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*, x_5^*) = (0, 50, 0, 0, 10)$$

sol. optima de (D) : $y^* = C_B B^{-1}$

$$[y_1^*, y_2^*] = [6, 0] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = [6, 0]$$

b) $y_1^* = 6 > 5$: le conviene a la empresa adquirir más unidades del recurso 1

$y_2^* = 0 < 1$: no le conviene a la empresa adquirir más unidades del recurso 2

Solución preguntas control #3.

Pregunta M: II

- a) Al cambiar el costo de una variable básica en la solución óptima solo cambian los costos modificados de las variables no básicas en la última forma canónica y el valor de la F.O. No se requiere cumpliendo el criterio de optimalidad la última forma canónica regresa integrando la solución óptima.

Calculamos los nuevos costos modificados de las no básicas.

$$\bar{c}_j = c_j - C_B^T B^{-1} a_j \quad \forall j$$

$$C_B^T = (-14, -9, 0) \quad C_B^T B^{-1} = (-3, -4, 0)$$

$$\bar{c}_1 = -30 - (-3, -4, 0) \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} = +16 > 0$$

$$\bar{c}_4 = -50 - (-3, -4, 0) \begin{pmatrix} 16 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = +18 > 0.$$

$$\bar{c}_5 = 0 - (-3, -4, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = +3 > 0$$

$$\bar{c}_6 = 0 - (-3, -4, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = +4 > 0.$$

Se cumple el criterio de optimalidad. (Maximización)

Luego: No cambia la base o grupo de variables básicas
No cambia el valor de las x básicas
Cambia el valor de la función objetivo.

- b) Por el teorema fundamental de dualidad sabemos que $C_B^T B^{-1} = y^T$. Luego si cambia C_B^T cambia y^T .

Los valores antiguos son:

$$(y_1^*, y_2^*, y_3^*) = (14, 8, 0) \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} = (5, 2, 0)$$

$$y_1^* = 5 \quad y_2^* = 2 \quad y_3^* = 0$$

Los nuevos valores son:

$$y_1^* = 3 \quad y_2^* = 4 \quad y_3^* = 0$$

- c) Como $\bar{b} = B^{-1} b$ se cambia el lado derecho necesariamente cambiando el lado derecho de la última forma canónica. Si el nuevo lado derecho es no negativo se mantiene la base óptima, pero cambiará el valor de las variables básicas y el valor de la función objetivo.

Calculamos el nuevo lado derecho:

$$\bar{b}' = B^{-1} b' = \begin{bmatrix} 1/5 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0,1 & -0,4 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 300 \\ 900 \\ 340 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 290 \end{pmatrix}$$

Se cumple la no negatividad.

Luego: la base óptima no cambia
las v. básicas cambian de valor y
sus nuevos valores son:

$$x_1^* = 300, \quad y_1^* = 200, \quad x_2^* = 290.$$

La función objetivo cambia de valor
y su nuevo valor es: 5800

- d) Como $y^{*T} = c_B^{*T} B^{-1}$ y c_B^* no ha cambiado y la base óptima tampoco entonces y^* no ha cambiado.

Soluciones preguntas control #3.

Pregunta # III

a) En el algoritmo simplex en forma matricial, en cada iteración se calculan:

- Todos los costos de las variables no básicas
- El lado derecho
- El vector columna de la variable que ingresará a la base. (La variable de menor \bar{c}_j ; $\bar{c}_j < 0$).

Por se calcula:

- Todos los vectores columnas de las variables, con excepción del reemplazo en un caso)
- El valor de la función objetivo.

b) Si x^* y y^* son soluciones óptimas del primal y dual:

$$\bar{c}_j^* = c_j - c^* B^{-1} a_j \quad \forall j$$

$$\bar{c}_j^* = c_j + y^{*T} a_j \quad \forall j$$

$$\bar{c}^* = c - A^T y^*$$

$$x^{*T} \bar{c}^* = x^{*T} (c - A^T y^*) = 0 \quad (2^a \text{ término})$$

$$x^{*T} c - x^{*T} A^T y^* = 0$$

$$b^T y^* - (Ax^*)^T y^* = 0$$

$$(b - Ax^*)^T y^* = 0 \quad (1^a \text{ término})$$

c) Si c_j cambia solamente cambia el costo asociado de x_j en la última forma canónica. Si se cumple el criterio de optimalidad.

dad la última forma canónica regular, manteniendo la solución óptima. No cambia la base óptima.

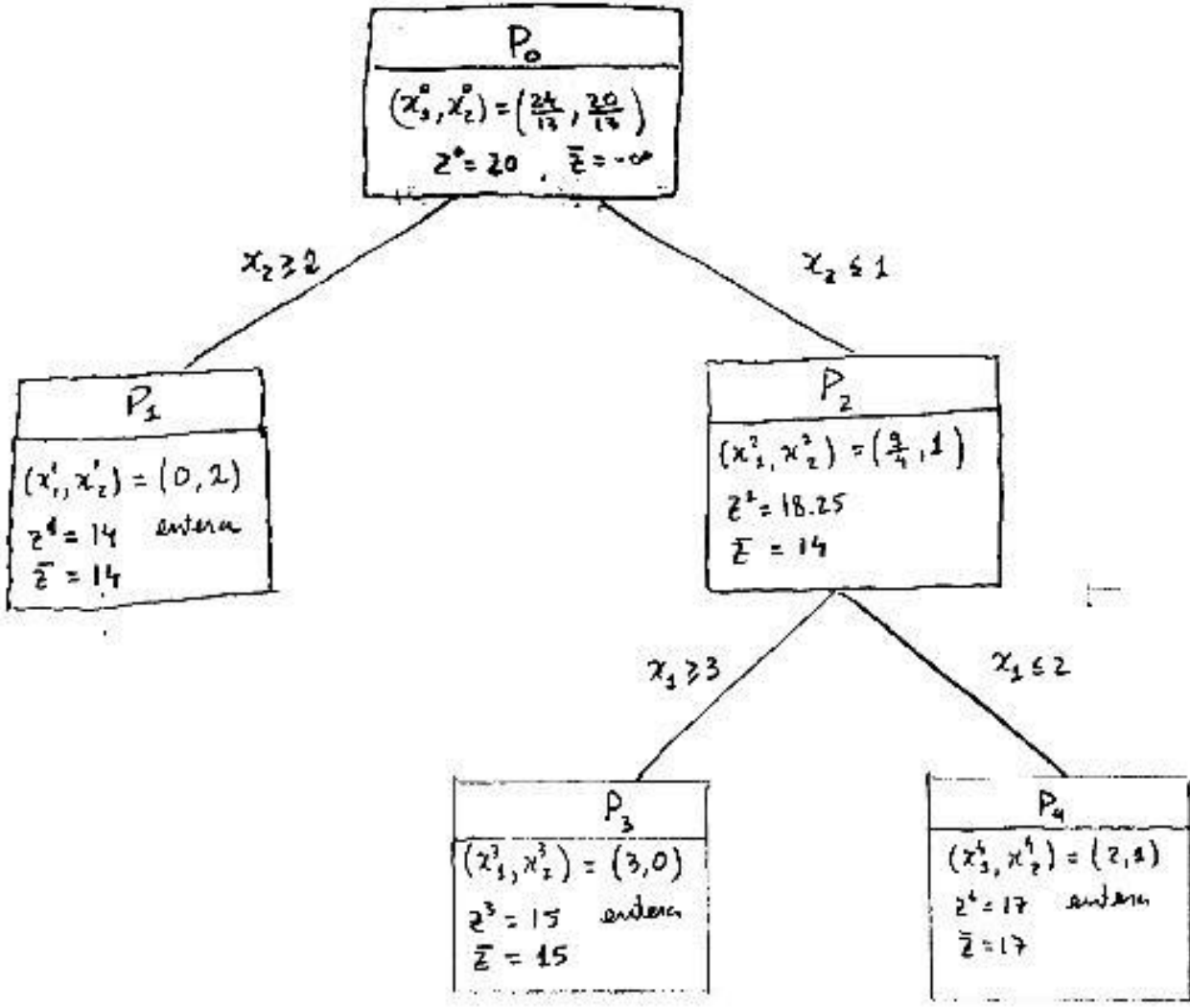
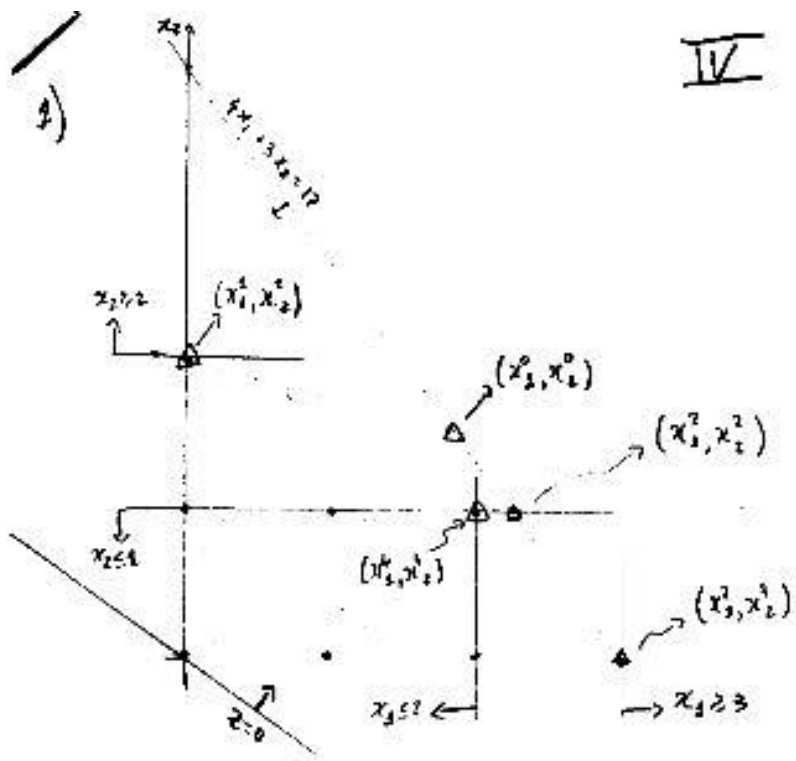
Luego: no cambia el valor de las v. básicas
no cambia el valor de la función objetivo.
no cambia el valor de la variable de holgura de la j -ésima restricción del dual.

d) La afirmación es correcta.

Sea $\bar{b} = \bar{b}' + b$. Si cambia b , no se cumple cambio de \bar{b} . Luego cambia el valor de las v. básicas siempre que se cumple la no negatividad. Al cambiar el valor de las v. básicas, cambia el valor de la F.O.

Si no se cumple la no negatividad, entonces cambiaría la forma canónica óptima.

IV



sol optima $(x_1^*, x_2^*) = (2, 1)$ $z = 17$

2)

- a) No es necesario ramificar P^+ porque los problemas en esta rama tienen un valor óptimo menor o igual a z^+ , por lo tanto no hay soluciones con valor mejor que \bar{z} .
- b) No es necesario ramificar P^- porque su solución óptima es factible para (PE). La cota inferior puede ser actualizada ($\bar{z} \leftarrow z^+$). Como z^+ es menor que el valor de una solución factible para (PE), no es necesario ramificar P^+ .
- c) No es necesario ramificar P^+ porque este problema es infactible. No es necesario ramificar P^- porque su valor óptimo no es mejor que \bar{z} (o porque su solución es factible para (PE)).